数理解析研究所講究録
1148 巻 2000 年 124-129

安定結婚問題の近似可能性について

盛田 保文 (Yasufumi Morita) 宮崎 修一 (Shuichi Miyazaki)
岩間 一雄 (Kazuo Iwama) マグナス ハルダースソン*(Magnús Halldórsson)
京都大学 大学院情報学研究科
{ymorita, shuichi, iwama, mmh}@kuis.kyoto-u.ac.jp

1 はじめに

安定結婚問題 [4] の例題は N 人ずつの男女と，各個人が N 人の異性全員を全順序で並べた希望リストからなる．男性と女性の 1 対 1 対応を**マッチング**といい，マッチング M において男性 m と女性 w がペアになっているとき，$M(m)=w$, $M(w)=m$ と書く．マッチング M において，男性 m と女性 w がペアになっておらず，m は自分の相手 $M(m)$ よりも w の方を好み，w は自分の相手 $M(w)$ よりも m の方を好むとき，(m,w) は blocking pair であるという．マッチング M に blocking pair が存在しないとき，M を**安定マッチング**または**安定結婚**という．安定結婚問題は，与えられた例題から安定なマッチングを求める問題である．この問題を最初に研究した Gale と Shapley は，全ての例題に少なくとも 1 つの安定なマッチングが存在することを示し，多項式時間でそのようなマッチングを求めるアルゴリズム (Gale-Shapley アルゴリズム) を示した [2].

安定結婚問題では，希望リストに異性 N 人全員を書かなければならず，さらにその N 人は全順序で並べなければならない．(本稿では，異性全員を書いたリストを**完全リスト**，全順序で並べられたリストを**全順序リスト**とよぶことにする.) しかし実際的な応用を考えたとき，希望リストに対するこのような制限は多くの場合厳しいものと思われる．そこで，希望リストの制限に対する 2 つの自然な緩和が考えられてきた．

1 つ目の緩和は希望リストが全順序である必要はなく，同順位を許すというものである [4, 6]. 同順位を許したリストを**同順位リスト**とよび，同順位リストを用いることを許した問題を本稿では SMT (Stable Marriage with Ties) と表記する．同順位リストを用いると，安定性の定義は拡張される．マッチング M において男性 m と女性 w がペアになっておらず，m は自分の相手 $M(m)$ よりも w の方を真に好み (すなわち，m のリストで w と $M(m)$ は同順位ではない)，w は自分の相手 $M(w)$ よりも m の方を真に好むとき，(m,w) を blocking pair という．このような blocking pair が存在しないマッチングを弱安定とよぶ. (同順位を許した場合には，他にも 2 つの安定性があるが，本論文では弱安定性のみを考えるため，この弱安定性を今後は単に安定とよぶ．) 2 つ目の緩和は，異性全員を希望リストに書く必要はなく，異性の部分集合を希望リストに書いてもよいというものである [4]. 異性の部分集合を書いたリストを**不完全リスト**とよび，不完全リストを用いることを許した問題を本稿では SMI(Stable Marriage with Incomplete lists) と表記する．不完全リストを用いた場合にも，blocking pair の定義は拡張される．マッチング M において (m,w) が以下の 3 つの条件を満たすとき，(m,w) を blocking pair と言う．(i) 男性 m と女性 w がペアになっていない．(ii) m は独身であるかまたは自分の相手 $M(m)$ よりも w の方を好む．(iii) w は独身であるかまたは自分の相手 $M(w)$ よりも m の方を好む．これら 2 種類の緩和については既に研究が行なわれており，Gale-Shapley アルゴリズムは (それぞれの場合に合わせて修正を加えることによって)，最大サイズ (ペア数) の安定マッチングを見つけることができるということが示されている [3, 4].

これら 2 つの緩和を同時に許した問題を SMTI (Stable Marriage with Ties and Incomplete lists) とよぶ．近年，岩間らは SMTI についての研究を行ない，SMTI の例題に対して最大サイズの安定マッチングを求める問題 (MAX SMTI) が NP 困難であることを示した [7]. 本稿では，MAX SMTI に対する近似可能性について考える．MAX SMTI の任意の例題 I に対して，最大サイズの安定マッチングを M_{max}，最小サイズの安定マッチングを M_{min} とする．このとき，常に $\frac{|M_{max}|}{|M_{min}|} \leq 2$ が成り立つ [8]. また，MAX SMTI の任意の例題に対して，どんなものでもよければ多項式時間で安定マッチングを 1 つ見つけることができる．よって，MAX SMTI に対する多項式時間 2- 近似アルゴリズムが存在する [8]. これまで MAX SMTI の近似度に関して知られていた結果はこれだけで，例えば MAX SMTI が PTAS を持つか

*現アイスランド大学 (mmh@raunvis.hi.is)

どうかについても知られていなかった．本稿では，MAX SMTI が PTAS を持たないこと，すなわち，ある正定数 ϵ に対して多項式時間 $(1+\epsilon)$- 近似アルゴリズムが存在しないことを示した．さらに，MAX SMTI の希望リストに制限を加えた問題を考え，この問題に対して近似度が 2 よりよい近似アルゴリズムが存在することを示した．文献 [7, 8] では，MIN egalitarian SMT, MIN regret SMT とよばれる，安定結婚問題のコスト最適化版についても研究されており，どんな正の定数 ϵ に対してもこれらの問題が $N^{1-\epsilon}$ で近似できないことが示されている．本稿では，これらの問題の近似度の下限を共に $\Omega(N)$ に改善した．これらの問題の近似度の上限は共に N であることが知られているため，我々の示した下限は厳密な下限である．

2 下限に関する結果

まず，一般の最小化問題に関して以下の定義を述べる．T を最小化問題 P に対する近似アルゴリズムとする．x を P に対する長さ N の入力とする．$opt(x)$ を x の最適値，$T(x)$ を T が x に対して出力する解のコストとする．任意の x に対して $T(x)/opt(x) \leq r(N)$ が成り立つとき，T は $r(N)$- 近似アルゴリズムであるという．P に対する多項式時間 $r(N)$- 近似アルゴリズムが存在するとき問題 P は $r(N)$ で近似可能であるという．

2.1 MAX SMTI の下限

本節では MAX SMTI の近似度の下限を示す．

問題： MAX SMTI.
例題： N 人ずつの男女と各個人の希望リスト．希望リストは不完全でよく，同順位を含んでもよい．
目的： ペア数が最大の安定マッチングを求めよ．

定理 1. P≠NP ならば，MAX SMTI が $1+\epsilon$ では近似できないような正の定数 ϵ が存在する．

証明. まず初めに MAX SAT という問題を考える．MAX SAT は，与えられた CNF 論理式に対して，できるだけ多くの項を充足させるような変数への値割り当てを求める問題である．MAX E3SAT(t) は，MAX SAT を制限した問題で，各項はちょうど 3 つのリテラルを持ち，さらに各変数の出現回数は高々 t 回である．もし P≠NP ならば，MAX E3SAT(t) は，ある正の定数 α と整数 t に対して $1+\alpha$ では近似できないということが知られている [1, 5]．この証明では，(例えば SAT のような)NP 完全問題から MAX E3SAT(t) への次のような多項式時間変換が示されている．SAT の例題 f を MAX E3SAT(t) の例題 g に変換したとする．もし f が充足可能なら，g も充足可能である．一方，もし f が充足可能でないならば，どんな値割り当てに対しても g は全項の β 倍より多くの項が充足不可能となる（$0<\beta<1$ はある定数）．

上述のような性質をもつ MAX E3SAT(t) の例題 f を MAX SMTI の例題 $T(f)$ に変換する．変換は次のような性質をもつ．もし f が充足可能ならば，全員がマッチングされるような $T(f)$ に対する安定マッチングが存在する (補題 1)．一方，どんな値割り当てに対しても f の全項の δ 倍以上の項が充足不可能ならば，$T(f)$ に対するどんな安定マッチングでも全体の $\frac{\delta}{9t}$ 倍より多くの男性が独身となる (補題 3)．ゆえに，多項式時間 $1/(1-\frac{\delta}{9t})$- 近似アルゴリズムが存在することは P=NP を意味する．

変換は，文献 [7] の変換をより簡単化したものである．f の変数の数を n，項の数を l，f の j 番目の項を $C_j (1 \leq j \leq l)$ とする．また，変数 x_i の出現回数を t_i とする．(従って $t=\max\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ である．) MAX E3SAT(t) の例題 f が与えられたとき，MAX SMTI の例題 $T(f)$，すなわち (1) 同数の男女，(2) 各男性の希望リスト，(3) 各女性の希望リストを作る．

男性集合と女性集合 $T(f)$ は $2n+6l$ 人ずつの男女からなる．男性及び女性は，次のようにそれぞれ 3 つのグループに分けられる．

男性集合

グループ (a): 各項 C_j に対して，3 人の男性 a_j, a'_j, a''_j が作られる．

グループ (b): 各変数 x_i に対して，2 人の男性 b_i, b'_i が作られる．

グループ (c): 項 C_j 中の各リテラル x_i(または $\overline{x_i}$) に対して，男性 $c_{i,j}$ が作られる．

女性集合

グループ (u): 各変数 x_i に対して，女性 u_i が作られる．

グループ (v): 各変数 x_i に対して，女性 v_i が作られる．

グループ (w): 項 C_j 中の各リテラル x_i(または $\overline{x_i}$) に対して，2 人の女性 $w^1_{i,j}, w^0_{i,j}$ が作られる．

変数の数は n なので，グループ (b) の男性が $2n$ 人，グループ (u) 及びグループ (v) の女性が n 人用意される．また，項の数が l，リテラルの数が $3l$ なので，グループ (a) 及びグループ (c) の男性が $3l$ 人，グループ (w) の女性が $6l$ 人用意される．

男性の希望リスト 次に各男性の希望リストの生成法を例を用いて説明する．ここでは，論理式 $f_0 = (x_1+\overline{x_2}+x_3)(\overline{x_1}+x_2+x_4)(x_2+\overline{x_4}+\overline{x_5})$ に対する例を用いる．（この例では x_2 が 3 度現れているので $t=3$ である．）表 1 は，この論理式から作られた例題 $T(f_0)$ の男性の希望リストを示している．表 1 のリストにはいくつかの空白が含まれていることに注意されたい．これは，後に述べる女性のリスト作成を簡単にするためである．このため，女性のリストを

作るまで空白はそのままにしておき，女性のリスト作成後，各男性のリストから空白部分を取り除く．

各項 C_j に対して，グループ (a) の 3 人の男性 a_j, a'_j, a''_j が作られる．f_0 の項 $C_1 = (x_1+\overline{x_2}+x_3)$ に対応する 3 人 a_1, a'_1, a''_1 に対する希望リストの作成法について述べる．項 C_1 はリテラル $x_1, \overline{x_2}, x_3$ を含んでいるので，6 人の女性 $w^0_{1,1}$, $w^1_{1,1}$, $w^0_{2,1}$, $w^1_{2,1}$, $w^0_{3,1}$, $w^1_{3,1}$ が作られている．a_1 はこのうち，$w^1_{1,1}$, $w^0_{2,1}$, $w^1_{3,1}$ を第 1 希望に同順位で書く．一般に男性 a_j は，変数 x_i が項 C_j 中に肯定リテラルとして現れた場合は女性 $w^1_{i,j}$ を書き，否定リテラルとして現れた場合は $w^0_{i,j}$ を書く．a'_1 と a''_1 は前述の 6 人の女性全員を第 1 希望に書く．直観的に言えば，a_j は項 C_j を充足させる変数に対応する女性の 1 人とペアになる．

次に，f_0 の変数 x_2 に対応する 2 人の男性 b_2, b'_2 を用いて，グループ (b) の男性の希望リストの作成法を説明する．男性 b_2 は女性 u_2 を第 2 希望に書く．(これは元の論理式 f によらず，常に第 2 希望である．) 次に b_2 は女性 v_2 を第 $t+4(=7)$ 希望に書く． x_2 は項 C_1, C_2, C_3 に現れるので，3 人の女性 $w^0_{2,1}$, $w^0_{2,2}$, $w^0_{2,3}$ が作られている．b_2 はこれら 3 人の女性をそれぞれ第 3，第 4，第 5 希望に書く．一般には，変数 x_i に対応した女性 $w^0_{i,j}$ が t_i 人作られている．b_i はこれらの女性を希望リストの第 3 位から第 (t_i+2) 位に書く．$t_i \leq t$ なので，これらの女性の位置は，既に v_i が書かれている第 $(t+4)$ 位以上になることはない．

男性 b'_2 のリストも同様に作られる．b'_2 は女性 u_2 を第 1 希望に，女性 v_2 を第 $t+3(=6)$ 希望に書く．x_2 は項 C_1, C_2, C_3 に現れるので，3 人の女性 $w^1_{2,1}$, $w^1_{2,2}$, $w^1_{2,3}$ が作られている．b'_2 はこれら 3 人の女性をそれぞれ第 3，第 4，第 5 希望に書く．

最後にグループ (c) の男性の希望リストを作る．項 C_j 中の変数 x_i に対応する男性 $c_{i,j}$ は，項 C_j 中の変数 x_i に対応する女性 $w^1_{i,j}$ と $w^0_{i,j}$ をそれぞれ第 $t+3(=6)$ 希望と第 $t+4(=7)$ 希望に書く．

男性のリストの作成は以上である．先に述べたように，この男性のリストはまだ空白を含んでいる．この空白は女性のリストを作成した後に取り除かれる．

女性の希望リスト 次に女性の希望リストを作る．女性の希望リストは男性の希望リストから自動的に作られる．まず初めに，男性を全順序で一列に並べる．これを男性の**ランク**と呼ぶ．$T(f_0)$ の男性のランクは表 1 に示す通りである．すなわち，a_1 がランク最上位で，$c_{5,3}$ がランク最下位である．一般的に，男性のランクは添字の辞書順で決定される．$\alpha^{\delta}_{\beta,\gamma}$ に対して，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の順で優先順位が付けられる．α については，a, b, c の順で優先度が高く，β, γ では，値の小さい数字の方が優先度が高い．δ に関しては，$'$ の数が少ないほど優先度が高い．

男性のランクと男性の希望リストに基づいて，女性の希望リストを生成する．まず，男性 m が女性 w を希望リストに書いていなければ，女性 w は男性 m を希望リストに書かない．そこで，女性 w をリストに書いている 2 人の男性 m_i と m_j を考える．(1) m_i のランクが m_j よりも上であり，(2) m_i のリスト中での w の順位が m_j のリスト中での w の順位と同じかそれ以上の時，およびその時に限り，w の希望リストでは m_i が m_j よりも上位に現れる． それ以外の時は，w の希望リストでは m_i と m_j は同順位とする． このように女性のリストを作ることで，女性のリストが半順序になってしまうことも考えられるが，男性のリストの作り方から女性のリストは同順位しか含まないことが分かる．

女性のリストをこのように作ることにより，マッチングが blocking pair を含んでいるかどうかを男性のリストのみから判定することができる． 男性 m_i が女性 w_i と，男性 m_j が女性 w_j とペアになっているとする． このとき，(m_i, w_j) は以下の 3 つの条件を満たす時，およびその時に限り，blocking pair である．(i) m_i は w_i よりも w_j の方が好きである．(ii) m_i のランクは m_j のランクよりも上である．(iii) m_i のリストでの w_j の順位は m_j のリストでの w_j の順位と同じかそれより上である．上述の条件 (ii) と (iii) を合わせたものが，w_j が m_j よりも m_i の方を好きだという条件になっている．

最後に，男性のリストにおいて，空白がなくなるまで女性を左へずらすことによって，男性のリスト中の空白を取り除く．

変換の正当性 前述のように，以下の補題 1 と 3 より変換の正当性が示される．

補題 1. もし f が充足可能ならば，$T(f)$ には全員を含む安定マッチングが存在する．

証明. f が値割り当て A によって充足されるとする．A のもとで x_i に割り当てられた値を $A(x_i) \in \{0,1\}$ とする．このとき，ペア数が N である安定マッチング M を次のように作る． グループ (b) の各男性は，値割り当て A に従って次のようにマッチングされる．もし $A(x_i)=0$ ならば $M(b_i)=v_i$, $M(b'_i)=u_i$ とし，もし $A(x_i)=1$ ならば $M(b_i)=u_i$, $M(b'_i)=v_i$ とする．項 C_j 中のリテラル x_i(または $\overline{x_i}$) に対応したグループ (c) の男性 $c_{i,j}$ は，もし $A(x_i)=0$ ならば $M(c_{i,j})=w^1_{i,j}$ とし，もし $A(x_i)=1$ ならば $M(c_{i,j})=w^0_{i,j}$ とする．

次にグループ (a) の男性を考える．項 C_j 中のリテラル x_i(または $\overline{x_i}$) に対応した 2 人の女性 $w^0_{i,j}$, $w^1_{i,j}$ のうち，どちらか 1 人はグループ (c) の男性とマッチングされ，もう 1 人はまだマッチングされていないことを思い出されたい．すなわち，もし $A(x_i)=0$ ならば $w^0_{i,j}$ が，もし $A(x_i)=1$ ならば $w^1_{i,j}$ がまだマッチングされないでいる．これらの女性がグループ (a) の男性とマッチングされる． リテラル z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3}

(z_{i_k} は x_{i_k} または $\overline{x_{i_k}}$) を含む項 C_j を考えよう. C_j は A によって充足されるので, これら3つのリテラルのうち少なくとも1つは値が1である. このリテラルを z_{i_1} と考えても一般性を失わない. もし $z_{i_1} = x_{i_1}$ ならば $A(x_{i_1}) = 1$ であるので, 上で述べたように女性 $w^1_{i_1,j}$ がまだマッチングされないでいる. x_{i_1} が C_j 中に肯定リテラルとして現れるので, グループ(a) の男性の希望リストの作り方で述べたように, a_j はリストにまだマッチングされていない女性 $w^1_{i_1,j}$ を書いている. 一方, $z_{i_1} = \overline{x_{i_1}}$ ならば, 女性 $w^0_{i_1,j}$ がマッチングされずに残っており, 男性 a_j はリストにこの女性 $w^0_{i_1,j}$ を書いている. どちらの場合でも, a_j は項を充足させるリテラルに対応する女性とマッチングされる. C_j にはこれ以外に2つのリテラル z_{i_2} と z_{i_3} がある. よってまだマッチングされていない女性が2人いる. 値割り当て A で x_{i_2} と x_{i_3} に割り当てられた値に従って, 一方は $w^0_{i_2,j}$ または $w^1_{i_2,j}$ で, もう一方は $w^0_{i_3,j}$ または $w^1_{i_3,j}$ である. a'_j と a''_j はこれらの女性とマッチングされる.

これで全員を含むマッチングが求まった. blocking pair の見つけ方は既に示したので, このマッチング M が安定であることは簡単に確かめることができる. □

補題 2. $T(f)$ の任意の安定マッチングを M とし, M 中の独身男性の数を k とする. このとき, f に対して, 充足されない項が高々 tk 項であるような値割り当てが存在する. (証明略)

補題 3. どんな値割り当てに対しても f の全項の δ 倍より多くの項が不充足となるならば, $T(f)$ のどんな安定マッチングでも全体の $\frac{\delta}{9t}$ 倍より多くの男性が独身となる.

証明. $T(f)$ 中の男性の数は $2n+6l$ であることを思い出されたい. ここで, n は f の変数の数で, l は f の項の数である. 各変数は少なくとも2回現れると仮定することができるので, $2n \leq 3l$ と考えてよい. ゆえに男性の数は $2n+6l \leq 9l$ である. ここで, 独身男性の数が高々 $\frac{\delta}{t}l$ であるような安定マッチングが $T(f)$ に存在したと仮定する. このとき補題2より, f に対して充足されない項が高々 δl であるような値割り当てが存在する. これは矛盾である. 従って, $T(f)$ のどんな安定マッチングでも $\frac{\delta}{t}l$ より多くの男性が独身である. よって独身男性の割合は $(\frac{\delta}{t}l)/9l = \frac{\delta}{9t}$ より大きい. □

本証明の初めに述べた通り, MAX E3SAT(t) に対して, (i) 論理式が充足可能である, (ii) どんな値割り当てに対しても全項の δ 倍より多くの項が不充足となる, という2つを区別するのが NP 困難であるような正定数 δ が存在する. 従って補題1と補題3より定理が成り立つ. □

2.2 Min egalitarian SMT の下限

安定マッチング M において, ある男性 (または女性) p が自分の希望リスト中の第 i 位の異性とペアになった場合, p の $regret$ を i と定義し, $regret_M(p) = i$ と表す. 例えば, p のリストが q_3, (q_2, q_4), q_1 となっており, q_2, q_4 は同順位であるとする. マッチング M において p が q_3, q_2, q_4, q_1 とそれぞれマッチングされたとき, $regret_M(p)$ はそれぞれ 1, 2, 2, 4 となる. すなわち $regret_M(p)$ はマッチング M に対する p の不満度と考えることができる.

ここでは, 全員の不満度の総和が最小となる安定マッチング, すなわち $\Sigma_p regret_M(p)$ を最小とする M を求める問題を考える. 希望リストが全順序で完全リストの場合 (MIN egalitarian SM) は, 多項式時間で最適解が求まることが知られている [4]. ここでは, 完全リストではあるが同順位を許した場合の問題 (MIN egalitarian SMT) について考える.

定理 2. P≠NP ならば, ある正の定数 ϵ が存在して, MIN egalitarian SMT は ϵN で近似できない. (証明略)

2.3 MIN regret SMT の下限

不満度に関する別の最適化問題として, 最も不満度の大きい人の不満度すなわち $\max_p regret_M(p)$ を最小化する問題が考えられる. この問題を MIN regret SMT とよぶ. (この問題の希望リストも同順位, 完全リストである.)

定理 3. P≠NP ならば, ある正の定数 ϵ が存在して, MIN regret SMT は ϵN で近似できない. (証明略)

3 上限に関する結果

再び MAX SMTI に関する近似アルゴリズムについて考える. 1章で述べたように, 2- 近似アルゴリズムは簡単に実現できる. この章では, 近似度が2よりよい近似アルゴリズムについて考える.

3.1 一般の MAX SMTI

近似度を2から改善するために, 最も都合の悪い例題すなわちペア数最大の安定マッチングとペア数最小の安定マッチングのペア数の比が2であるような例題について考える.

定理 4. t を任意の正の整数とする. SMTI の例題を I, I に対する安定マッチングの最大サイズを MAX 最小サイズを MIN とする. ここで $MAX/2 = MIN$ を満たすとする. サイズが MIN であるような I の安定マッチングが与えられたとき, サイズが

$\min\{MAX, MIN+t\}$ であるような I の安定マッチングを多項式時間で作ることができる. (証明略)

定理4より, 少なくともサイズ $\frac{MAX}{2}+1$ の安定マッチングを作ることができる. (定理4は, 例えば $MIN = \frac{MAX}{2}+1$ であるような例題については何も言及していないことに注意されたい.) ゆえに, 次の系が成り立つ.

系 1. MAX SMTI に対して, 多項式時間 $(2-\frac{1}{N})$-近似アルゴリズムが存在する.

3.2 制限を加えた MAX SMTI

本節では, MAX SMTI に制限を加えた2つの問題について考える.

3.2.1 MAX SMTI(k)

まず, 希望リストに空欄が少なくなるように例題に制限を加える.

問題 : MAX SMTI(k). ここで k は $0 < k \le N$ の整数である.

例題 : N 人ずつの男女と各個人の希望リスト. 希望リストは不完全リスト, 同順位を含む. ただし, 少なくとも k 人の男性 (または女性) の希望リストには, 少なくとも k 人の異性が書かれている.

目的 : ペア数が最大の安定マッチングを求めよ.

定理 5. c を $0 < c < 1$ の定数とする. MAX SMTI(k) は, $k = cN$ であったとしても NP 困難である. ここで N は例題サイズである. (証明略)

定理 6. c を $0 < c < 1$ の定数とする. MAX SMTI(cN) の任意の例題を I とする. I のどんな安定マッチングに対しても, $|M| \ge cN$ が成り立つ. (証明略)

系 2. MAX SMTI(cN) に対して, 近似度が高々 $\{2, \frac{1}{c}\}$ であるような多項式時間近似アルゴリズムが存在する.

証明. 2-近似アルゴリズムは存在するということを思い出されたい. c が $\frac{1}{2}$ より大きいときは, $\frac{1}{c}$-近似解を得ることができる. なぜならば, 定理6よりサイズ cN の安定マッチングを見つけることができ, 一方最適解のサイズは高々 N だからである. □

3.2.2 MAX SMTI[t]

次に, 希望リストに同順位を用いる人が少なくなるように例題に制限を加える.

問題: MAX SMTI[t]. ここで t は $0 < t \le 2N$ の整数である.

例題: N 人ずつの男女と各個人の希望リスト. 希望リストは不完全リスト, 同順位を含む. ただし, 希望リスト中に同順位を用いている人の数は高々 t 人である.

目的: ペア数が最大の安定マッチングを求めよ.

定理 7. ϵ を $0 < \epsilon \le 1$ の定数とする. MAX SMTI[t] は, $t = N^{\epsilon}$ であったとしても NP 困難である. ここで N は例題サイズである. (証明略)

定理 8. MAX SMTI[t] の例題を I とする. I の最大及び最小サイズの安定マッチングをそれぞれ M_{max}, M_{min} とする. このとき, $|M_{max}| - |M_{min}| \le t$ である. (証明略)

定理8より, 次の系が成り立つ.

系 3. MAX SMTI[t] に対して, コストが少なくとも $|M_{max}| - t$ であるような解を見つける多項式時間近似アルゴリズムが存在する. ここで, $|M_{max}|$ は最適解のコストである.

参考文献

[1] S. Arora and C. Lund, "Hardness of Approximations," Chapter in the book Approximation Algorithms for NP-hard problems, D. Hochbaum editor, PWS Publishing, 1996.

[2] D. Gale and L. S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," *Amer. Math. Monthly*, Vol.69, pp.9-15, 1962.

[3] D. Gale and M. Sotomayor, "Some remarks on the stable matching problem," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.11, pp.223-232, 1985.

[4] D. Gusfield and R. W. Irving, "The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms," MIT Press, Boston, MA, 1989.

[5] J. Håstad, "Some optimal inapproximability results," *Proc. STOC97*, pp. 1–11, 1997.

[6] R. W. Irving, "Stable marriage and indifference," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.48, pp.261-272, 1994.

[7] K. Iwama, D. Manlove, S. Miyazaki, and Y. Morita, "Stable Marriage with Incomplete Lists and Ties," *Proc. ICALP'99*, pp. 443-452, 1999.

[8] D. Manlove, R. W. Irving, K. Iwama, S. Miyazaki, Y. Morita, "Hard Variants of Stable Marriage," Technical Report TR-1999-43, Computing Science Department of Glasgow University, September 1999

a_1	$w^1_{1,1}$	$w^0_{2,1}$	$w^1_{3,1}$				
a'_1	$w^0_{1,1}$	$w^0_{2,1}$	$w^0_{3,1}$	$w^1_{1,1}$	$w^1_{2,1}$	$w^1_{3,1}$	
a''_1	$w^0_{1,1}$	$w^0_{2,1}$	$w^0_{3,1}$	$w^1_{1,1}$	$w^1_{2,1}$	$w^1_{3,1}$	
a_2	$w^0_{1,2}$	$w^1_{2,2}$	$w^1_{4,2}$				
a'_2	$w^0_{1,2}$	$w^0_{2,2}$	$w^0_{4,2}$	$w^1_{1,2}$	$w^1_{2,2}$	$w^1_{4,2}$	
a''_2	$w^0_{1,2}$	$w^0_{2,2}$	$w^0_{4,2}$	$w^1_{1,2}$	$w^1_{2,2}$	$w^1_{4,2}$	
a_3	$w^1_{2,3}$	$w^0_{4,3}$	$w^0_{5,3}$				
a'_3	$w^0_{2,3}$	$w^0_{4,3}$	$w^0_{5,3}$	$w^1_{2,3}$	$w^1_{4,3}$	$w^1_{5,3}$	
a''_3	$w^0_{2,3}$	$w^0_{4,3}$	$w^0_{5,3}$	$w^1_{2,3}$	$w^1_{4,3}$	$w^1_{5,3}$	
b_1		u_1	$w^0_{1,1}$	$w^0_{1,2}$			v_1
b'_1	u_1		$w^1_{1,1}$	$w^1_{1,2}$		v_1	
b_2		u_2	$w^0_{2,1}$	$w^0_{2,2}$	$w^0_{2,3}$		v_2
b'_2	u_2		$w^1_{2,1}$	$w^1_{2,2}$	$w^1_{2,3}$	v_2	
b_3		u_3	$w^0_{3,1}$				v_3
b'_3	u_3		$w^1_{3,1}$			v_3	
b_4		u_4	$w^0_{4,2}$	$w^0_{4,3}$			v_4
b'_4	u_4		$w^1_{4,2}$	$w^1_{4,3}$		v_4	
b_5		u_5	$w^0_{5,3}$				v_5
b'_5	u_5		$w^1_{5,3}$			v_5	
$c_{1,1}$						$w^0_{1,1}$	$w^1_{1,1}$
$c_{1,2}$						$w^0_{1,2}$	$w^1_{1,2}$
$c_{2,1}$						$w^0_{2,1}$	$w^1_{2,1}$
$c_{2,2}$						$w^0_{2,2}$	$w^1_{2,2}$
$c_{2,3}$						$w^0_{2,3}$	$w^1_{2,3}$
$c_{3,1}$						$w^0_{3,1}$	$w^1_{3,1}$
$c_{4,2}$						$w^0_{4,2}$	$w^1_{4,2}$
$c_{4,3}$						$w^0_{4,3}$	$w^1_{4,3}$
$c_{5,3}$						$w^0_{5,3}$	$w^1_{5,3}$

表 1: $T(f_0)$ の男性の希望リスト

$$f_0 = (x_1 + \overline{x_2} + x_3)(\overline{x_1} + x_2 + x_4)(x_2 + \overline{x_4} + \overline{x_5})$$